



**XII EDYCJA OGÓLNOPOLSKIEJ OLIMPIADY  
Z MATEMATYKI „APOLONIUSZ”  
POZIOM ROZSZERZONY**

skierowanej do uczniów szkoły ponadpodstawowej  
dnia 16 listopada 2023r.



Ilość punktów do zdobycia: maksymalnie 13. Powodzenia!

*Uwaga: Można korzystać z prostego kalkulatora i przyrządów geometrycznych.*

**Zadanie (1pkt)** Dane są liczby  $a = 2^{64}$ ,  $b = 3^{32}$ ,  $c = 4^{24}$ ,  $d = 5^{16}$ . Gdy uporządkujemy te liczby malejąco otrzymamy  
A)  $d > a > c > b$       B)  $a > b > c > d$       C)  $d > b > a > c$       D)  $a > c > b > d$

**Zadanie 2 (1pkt)** O nieskończonym ciągu  $(x_n)$  wiadomo, że  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 100$  oraz ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = 3^{x_n}$  jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 9. Pierwszy wyraz  $x_1$  wynosi  
A) 1      B) 2      C) 3      D) 4

**Zadanie 3 (1pkt)** Dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja  $y = (m^2 + 2m - 8)x + m^2 + 5m$  jest rosnąca, a jej miejscem zerowym jest liczba ujemna?

A)  $m \in (-\infty, -5) \cup (2, \infty)$       B)  $m \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$       C)  $m \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$       D)  $m \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

**Zadanie 4 (2pkt)** Oceń prawdziwość zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli zdanie jest fałszywe.

A) Liczba w postaci jednej potęgi $\sqrt{5^3 \sqrt{5} \sqrt{5}}$ wynosi $5^{3/5}$ .	
B) Liczba przekątnych w trzynastokącie wypukłym wynosi 65.	
C) Wartość wyrażenia $\frac{1}{\operatorname{tg} 67,5^\circ} - \operatorname{tg} 67,5^\circ$ wynosi -2.	

**Zadanie 5 (2pkt)** Wiedząc, że  $a = \log_3 2$  i  $b = \log_3 7$ , oblicz  $\log_{81} 84$  w zależności od  $a$  i  $b$ .

**Zadanie 6 (2pkt)** Wiadomo, że  $a - b + c = 9$  oraz  $a^2 + b^2 + c^2 = 65$ . Oblicz wartość wyrażenia  $ac - ab - bc$ .

**Zadanie 7 (2pkt)** Pole trapezu równoramiennego opisanego na okręgu wynosi  $8\sqrt{2}$ . Wyznacz długość ramienia tego trapezu, jeśli jest ono nachylone do dłuższej podstawy pod kątem  $45^\circ$ .

**Zadanie 8 (2pkt)** Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa  $12\sqrt{3}$  cm, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 36 cm. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.